PCSI. 06/07 Calculatrice autorisée. 4 heures.

Physique. Devoir surveillé N°10.

Il est rappelé que votre copie est destinée à être lue et corrigée. En conséquence, une présentation claire et lisible est recommandée. Il en sera tenu compte dans la notation.
Les questions sont numérotées. Les réponses à ces questions devront être données sous forme littérale la plus simplifiée possible, encadrées, avant toute application numérique. Toute réponse non justifiée sera considérée comme fausse.

Exercice 1. Cycles moteurs de Carnot, Beau de Rochas et Stirling

Après une étude graphique des machines dithermes, à l'aide du diagramme de Raveau, et une vérification expérimentale de l'expression de l'entropie d'un gaz parfait, on compare les efficacités des cycles moteurs de Carnot, Beau de Rochas et Stirling. Ce dernier cycle présente des caractéristiques intéressantes, notamment un faible niveau de pollution, une durée de vie élevée et une excellente efficacité.

1. Machine ditherme.

Une masse m de gaz, constituée principalement d'air, subit un cycle moteur entre deux sources thermiques, l'une la source froide à la température T_f = 290 K, l'autre la source chaude à la température T_c = 1450 K.

1.1. Exprimer les bilans d'énergie et d'entropie au cours d'un cycle réel. On introduira les quantités algébriques suivantes, relatives à un cycle : W, Q_f , Q_c , S^p ; W est le travail reçu (algébriquement) par le fluide (si $W > 0$, il est effectivement reçu par le fluide, si $W < 0$, il est effectivement fourni par le fluide). De même Q_f est la chaleur reçue par le fluide de la part de la source froide ; Q_c est la chaleur reçue par le fluide de la part de la source chaude.
Dans l'écriture de S^p , qui désigne l'entropie produite, p est un indice et non un exposant.

1.2. Représenter, sur un même graphe, donnant Q_c en fonction de Q_f , appelé diagramme de Raveau, les deux équations précédentes, W et S^p étant des quantités déterminées. En déduire la position du point de fonctionnement sur le diagramme, compte tenu des signes de W et S^p, ainsi que le sens des échanges thermiques (signes de Q_c et Q_f).

1.3. Etablir l'expression de l'efficacité η du moteur, appelée aussi rendement, en fonction de T_c, T_f, Q_c et S^p.

1.4. Que devient cette efficacité lorsque la machine ditherme fonctionne selon un cycle de Carnot ? Calculer sa valeur η_c . Ce résultat, sensiblement inférieur à 1, doit-il être attribué à une imperfection de la machine (frottements divers) ou provient-il d'une limitation fondamentale ? Dans ce dernier cas, préciser la nature de cette limitation.

1.5. On définit le degré d'irréversibilité du cycle à l'aide du rapport $r = \eta / \eta_c$. Sachant que r = 0,94 et que le moteur fournit un travail de 15 kJ par cycle, trouver Q_c , Q_f et S^p . Porter avec soin ces résultats sur un graphe, donnant Q_c en fonction de Q_f dans lequel 1 cm représente 5 kJ.

2. Entropie d'un gaz parfait.

2.1. Etablir l'expression de la variation élémentaire de l'entropie d'un gaz parfait monoatomique en fonction de sa température T et de sa pression p. Montrer que l'entropie du gaz peut s'écrire :
$S = \alpha (-ln\, p + \beta \ln T + Cte)$
α étant un coefficient que l' on exprimera, en fonction du nombre n de moles et de la constante R des gaz parfaits, et β un facteur que l'on déterminera. La constante *Cte* qui apparaît dans la formule précédente a pu être déterminée expérimentalement à l'aide du graphe $C_p(T)$ donnant la capacité thermique molaire de l'argon gazeux, sous 1 bar, en fonction de la température.

2.2. Dans le cas d'un gaz parfait diatomique, β = 7/2. En déduire la relation entre la pression et la température d'un gaz parfait diatomique au cours d'une évolution isentropique.

3. Cycle de Beau de Rochas et Otto.

Dans un moteur à explosion, le fluide, de masse m = 2,9 g , assimilé à un gaz parfait diatomique, de masse molaire M = 29 g, suit une évolution cyclique réversible *ABCD*, constituée de deux portions isentropiques, *AB* et *CD*, .séparées par deux portions isochores, *BC* et *DA*. Le cycle n'est plus ditherme : il y a mise en contact du fluide avec une succession de sources chaudes et froides.
Les températures et les pressions aux points *A* et *C* sont respectivement :
T_A = 290 K p_A = 1 bar T_C = 1450K p_C = 40 bar
En outre, le taux de compression $\alpha_v = V_A / V_C$ est égal à 8.

3.1. Quelle équation relie la pression et le volume le long des courbes *AB* et *CD* ? Calculer les pressions, en bar, p_B et p_D en *B* et *D* respectivement, ainsi que les volumes en litre en ces points.
3.2. Représenter avec soin le cycle *ABCD* dans le diagramme de (p,V). Justifier le sens de description du cycle.
3.3. Calculer, en kJ, le travail et la chaleur reçus (algébriquement) par le gaz sur chaque portion du cycle. Vérifier l'existence d'une relation simple entre toutes les grandeurs calculées.
3.4. Quelle est l'efficacité η_{BO} de ce cycle moteur, c'est-à-dire le rapport du travail fourni au milieu extérieur sur la chaleur reçue de la part des sources chaudes représentées sur la portion *BC* du diagramme ? Comparer η_{BO} à l'efficacité η_C d'un cycle moteur ditherme fonctionnant entre les températures T_A et T_C. Commenter.

4. Cycle de Stirling

Dans un cycle de Stirling, une même masse d'air (m = 2,9 g) suit une évolution cyclique réversible *A' B' C' D'*, constituée de deux portions isothermes *A' B'* et *C' D'* séparées par deux portions isochores *B'C'* et *D'A'*. Les températures et les pressions aux points *A'* et *C'* sont les mêmes qu'aux points *A* et *C* respectivement. Le taux de compression ($\alpha_v = V_A / V_C$) est aussi le même que précédemment.

4.1. Quelle équation relie la pression et le volume le long des courbes *A' B'* et *C' D'* ? En déduire les pressions p_B' et p_D' , en *B'* et *D'*, respectivement.
4.2. Représenter avec soin le cycle *A'B'C'D'* dans le diagramme (p,V). Comparer ce diagramme au précédent.
4.3. Calculer le travail et la chaleur reçus (algébriquement) par le gaz sur chaque portion du cycle.
4.4. Les échanges thermiques au cours des évolutions isochores se font à l'aide d'un régénérateur interne à la machine. Les seuls échanges thermiques avec l'extérieur ont lieu pendant les phases isothermes. Quelle est l'efficacité η_S de ce cycle moteur, c'est-à-dire le rapport du travail fourni au milieu extérieur sur la chaleur reçue de la part des sources chaudes représentées sur la portion *C'D'* du diagramme ? Comparer η_S à η_{BO} et η_C.

Exercice 2. Optimisation d'un compresseur

On veut réaliser une installation de production d'air comprimé répondant au « cahier des charges » suivant :

- état initial de l'air : pression : $P_1 = 10^5$ Pa, température $T_1 = 290$ K (T_1 : température ambiante) ;
- état final de l'air : pression : $P_2 = 5.10^5$ Pa, température T_1. L'air sera assimilé à un gaz parfait ($R = 8{,}31$ J.mol^{-1}K^{-1}), de rapport $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = 1{,}40$

Les échanges thermiques éventuels se font uniquement avec l'extérieur à la température uniforme T_1.

1. Déterminer l'entropie créée Sc lors de cette transformation en fonction du travail W pour la réaliser.
   Quel est le travail minimal W_m nécessaire à cette transformation ?
   A quel type de transformation correspond cette valeur W_m ? Montrer que ce travail est bien celui recherché.

2. La transformation précédente étant irréalisable en pratique, on propose les opérations suivantes:
   - compression adiabatique réversible de l'état initial jusqu'à la pression P_2 ;
   - refroidissement isobare jusqu'à l'état final.

   Représenter dans un diagramme (P,V) les différentes transformations.

   Exprimer le travail total W_1 nécessaire ainsi que le rapport $\eta_1 = \dfrac{W_1}{W_m}$.

   Faire l'application numérique pour η_1 dans le cas d'une mole de gaz parfait.

3. Calculer à nouveau le travail W pour un compresseur à deux étages :
   - compression adiabatique réversible (P_1, T_1) → P ;
   - refroidissement isobare jusqu'au retour à T_1
   - compression adiabatique réversible (P, T_1) → P_2 ;
   - refroidissement isobare jusqu'au retour à T_1.

   Comment faut-il choisir la pression P pour que W soit minimal ?
   Quelle est l'expression de ce travail minimal W_2 ?
   Exprimer le rapport $\eta_2 = \dfrac{W_2}{W_m}$.

   Faire l'application numérique pour η_2 dans le cas d'une mole de gaz parfait.
   Comment procéder pour faire alors tendre W vers W_m ?

Tournez s.v.p

Exercice 3. Potentiel de Yukawa.

On se propose de déterminer la distribution de charges qui crée en tout point *M* de l'espace ($\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r, r = OM$) un potentiel électrostatique de la forme :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

q étant la charge élémentaire (*q* = 1,6.. 10-19 C) et *a* une distance (*a* = 10^{-10} m).

1. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point *M* (différent de l'origine *O*).
2. Calculer le flux de ce champ à travers la surface d'une boule de centre *O* et de rayon *r*, et en déduire la charge *Q(r)* contenue dans cette boule.
   Etudier les cas limites $r \to \infty$ et $r \to 0$: quelles conclusions peut-on en tirer sur la constitution de la distribution de charges responsable de ce potentiel électrostatique *V* ?
3. Déterminer la densité de charge volumique $\rho(r)$ répartie dans l'espace autour de *O*.
   La distribution de charges étudiée peut être prise comme modèle électrostatique d'un atome. Qu'en pensez-vous ?