Détection de véhicule par boucle inductive.

1 - Fonction de transfert

Comme l'A O est idéal et en régime linéaire on a :

$$\underset{\sim}{u} = V_{\ominus} = \frac{xR'}{xR' + (1-x)R'}\,\underset{\sim}{v} \qquad \text{pont diviseur de tension}$$

$$\underset{\sim}{u} = x\,\underset{\sim}{v}$$

Soit s la tension aux bornes de la bobine

les condensateurs Ca, Cb forment un pont diviseur de la tension s. D'où

$$\underset{\sim}{w} = \frac{\dfrac{1}{jC_b\omega}}{\dfrac{1}{jC_a\omega} + \dfrac{1}{jC_b\omega}}\,\underset{\sim}{s} = \frac{\dfrac{1}{C_b}}{\dfrac{1}{C_a} + \dfrac{1}{C_b}}\,\underset{\sim}{s}$$

$$\underset{\sim}{w} = \frac{C_a}{C_a + C_b}\,\underset{\sim}{s}$$

Pour déterminer la relation entre v et w on applique le théorème de Millman.

$$\underset{\sim}{s}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC_a\omega\right) = \frac{\underset{\sim}{v}}{R} + jC_a\omega\,\underset{\sim}{w}$$

$$\left(\frac{C_a + C_b}{C_a}\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC_a\omega\right)\underset{\sim}{w} = \frac{\underset{\sim}{u}}{xR} + jC_a\omega\,\underset{\sim}{w}$$

$$\frac{\underset{\sim}{u}}{xR} = \underset{\sim}{w}\left(\frac{C_a + C_b}{C_a}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC_a\omega\right) - jC_a\omega\right)$$

$$\underset{\sim}{H}(j\omega) = \frac{1}{xR\left(\dfrac{C_a + C_b}{C_a}\dfrac{1}{R} + j\left((C_a + C_b)\omega - \dfrac{C_a + C_b}{C_a}\dfrac{1}{L\omega} - C_a\omega\right)\right)}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\dfrac{C_a + C_b}{C_a}x + j\,xR\left(C_b\omega - \dfrac{C_a + C_b}{C_a}\dfrac{1}{L\omega}\right)}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\dfrac{1}{x}\dfrac{C_a}{C_a + C_b}}{1 + j\dfrac{RC_a}{C_a + C_b}\left(C_b\omega - \dfrac{C_a + C_b}{C_a}\dfrac{1}{L\omega}\right)}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{C_a/(C_a + C_b)}{1 + j\left(\dfrac{RC_aC_b}{C_a + C_b}\omega - \dfrac{R}{L}\dfrac{1}{\omega}\right)}}$$

Par identification :

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{x}\frac{C_a}{C_a + C_b}} \ ; \quad \frac{Q}{\Omega} = \frac{RC_aC_b}{C_a + C_b} \ ; \quad Q\Omega = \frac{R}{L}$$

On a $\dfrac{Q}{\Omega} = \dfrac{Q^2 L}{R} = R\dfrac{C_aC_b}{C_a + C_b}$

$$Q^2 = \frac{R^2}{L}\frac{C_aC_b}{C_a + C_b} \longrightarrow \boxed{Q = R\left(\frac{C_aC_b}{L(C_a + C_b)}\right)^{1/2}}$$

$$\Omega = \frac{R}{L}\frac{1}{Q} = \frac{R}{L}\frac{1}{R}\left(\frac{L(C_a + C_b)}{C_aC_b}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\Omega = \left(\frac{1}{L}\,\frac{C_a + C_b}{C_aC_b}\right)^{1/2}}$$

2. Equation différentielle

On a $\frac{\underline{w}}{\underline{u}} = \frac{H_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\Omega}-\frac{\Omega}{\omega}\right)}$. En effectuant un produit en croix :

$$\underline{w}\left(1+jQ\left(\frac{\omega}{\Omega}-\frac{\Omega}{\omega}\right)\right) = H_0\,\underline{u}$$

$$\underline{w} + j\frac{Q}{\Omega}\omega\,\underline{w} + \frac{1}{j\omega}Q\Omega\,\underline{w} = H_0\,\underline{u}$$

On multiplie par $j\omega$:

$$Q\Omega\,\underline{w} + j\omega\,\underline{w} + (j\omega)^2\frac{Q}{\Omega}\underline{w} = H_0\, j\omega\,\underline{u}$$

On repasse en notation réelle.

$$\frac{Q}{\Omega}\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{dw}{dt} + Q\Omega\, w = H_0\frac{du}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{\Omega}{Q}\frac{dw}{dt} + \Omega^2 w = H_0\frac{\Omega}{Q}\frac{du}{dt} \qquad a=\frac{\Omega}{Q}\ ;\ b=\Omega^2\ ;\ c=H_0\frac{\Omega}{Q}}$$

3_Oscillations.

Lorsque le bouclage est réalisé par la fermeture de K, on a $w=u$. L'équation différentielle précédente s'écrit alors (en supposant l'A.O en régime linéaire).

$$\frac{d^2w}{dt^2} + \left(\frac{\Omega}{Q} - H_0\frac{\Omega}{Q}\right)\frac{dw}{dt} + \Omega^2 w = 0$$

Pour avoir des oscillations sinusoïdales il faut que :

$\frac{\Omega}{Q} - H_0\frac{\Omega}{Q} = 0$ ce qui impose $H_0 = 1$.

On en déduit l'expression de x_0.

$$\boxed{x_0 = \frac{C_a}{C_a+C_b}}$$

La pulsation des oscillations est alors :

$$\omega(z) = \Omega = \left(\frac{1}{L(z)}\left(\frac{C_a+C_b}{C_aC_b}\right)\right)^{1/2}.$$

$$\omega(z) = \left(\frac{1}{L_1}\left(\frac{C_a+C_b}{C_aC_b}\right)\right)^{1/2}(1-z)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\boxed{\omega(z) \simeq \omega_0\left(1+\frac{z}{2}\right) \quad \text{avec } \omega_0 = \left(\frac{1}{L_1}\left(\frac{C_a+C_b}{C_aC_b}\right)\right)^{1/2}}$$

4_Condition sur x

La fonction de transfert de l'amplificateur non inverseur est $\frac{\underline{v}}{\underline{u}} = \frac{1}{x}$. Si en pratique x est légèrement supérieur à x_0, cette fonction de transfert sera légèrement inférieure à la valeur nécessaire à l'entretien des oscillations et celles-ci s'éteindront.

Si x est légèrement inférieur à x_0 le circuit bouclé sera le siège d'oscillations non sinusoïdales dont l'amplitude est limitée par la tension de saturation de l'amplificateur opérationnel.

5. Utilité du montage.

C'est un montage suiveur. Aucun courant de sortie n'est tiré du montage précédent. Le fonctionnement de celui-ci n'est donc pas modifié.

6. Amplitude E_F

Le théorème de Millman permet d'écrire : $\dfrac{\underline{V_E}}{R_1} + jC_1\omega\,\underline{V_F} = 0$

$$\underline{V_F} = -\frac{\underline{V_E}}{jR_1C_1\omega} \longrightarrow E_F = \frac{E_0}{R_1C_1\omega} \quad \text{(intégrateur)}$$

$$\boxed{E_F = \frac{\omega_1}{\omega(\xi)}\,E_0}$$

7. Amplitude E_F'

Le théorème de Millman permet d'écrire $jC_1\omega\,\underline{V_E} + \dfrac{\underline{V_F}''}{R_1} = 0$.

$$\underline{V_F}' = -jR_1C_1\omega\,\underline{V_E} \quad \text{(dérivateur)}$$

$$\boxed{E_{F'} = \frac{\omega(\xi)\,E_0}{\omega_1}}$$

8. Condition sur R_2C_2

Cette partie du montage est un détecteur de crête.

Pour avoir $V_G = E_F$ la capacité ne doit pas avoir le temps de se décharger sur une période. Il faut donc que

$$R_2C_2 \gg \frac{1}{\omega(\xi)}$$

9. Potentiel V_G'

Cette partie de circuit est aussi un détecteur de crête négative.

On a donc $V_G' = -E_{F'}$

10. Tension de sortie $S = V_H$

Le théorème de Millman écrit à l'entrée inverseuse du dernier amplificateur opérationnel donne

$$0 = \frac{V_G}{R_2} + \frac{S}{R_3} + \frac{V_0}{yr} - \frac{V_0}{(1-y)r} + \frac{V_G'}{R_2} \quad \text{soit :}$$

$$S = R_3\left(-\frac{1}{R_2}\left(V_G + V_G'\right) + \frac{V_0}{r}\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{y}\right)\right)$$

$$\text{or } V_G = E_F = \frac{\omega_1}{\omega(\xi)}E_0 = \frac{\omega_1}{\omega_0\left(1+\frac{\xi}{2}\right)}E_0 \simeq \frac{\omega_1}{\omega_0}E_0\left(1-\frac{\xi}{2}\right)$$

$$V_G' = -E_F' = -\frac{\omega(\xi)}{\omega_1}E_0 = \frac{\omega_0}{\omega_1}\left(1+\frac{\xi}{2}\right)E_0$$

$$\boxed{S = R_3\left(-\frac{E_0}{R_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\left(1-\frac{\xi}{2}\right) - \frac{\omega_0}{\omega_1}\left(1+\frac{\xi}{2}\right)\right) + \frac{V_0}{r}\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{y}\right)\right)}$$

11. Expression de S en présence d'un véhicule

En l'absence de véhicule on a :

$$0 = R_3\left(-\frac{E_0}{R_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) + \frac{V_0}{r}\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{y}\right)\right)$$

Par soustraction on obtient

$$S = R_3\left(-\frac{E_0}{R_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\left(1-\frac{\xi}{2}\right) - \frac{\omega_0}{\omega_1}\left(1+\frac{\xi}{2}\right)\right) - R_3\left(-\frac{E_0}{R_2}\left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right)\right)\right)$$

$$\boxed{S = \frac{R_3}{R_2} E_0 \frac{z}{\ell} \left(\frac{w_0}{w_1} + \frac{w_1}{w_0} \right)}$$

La tension de sortie s est proportionnelle à z, qui traduit la variation d'inductance du capteur et cette quantité z est liée à la présence d'un véhicule. Le montage opère bien ce qui est voulu.