Equations différentielles linéaires.

Une équation différentielle est une équation où figurent une fonction inconnue, par exemple $y(t)$, et certaines de ses dérivées.
Une équation différentielle est linéaire en $y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t) \ldots y^{(n)}(t)$ quand elle est de la forme :

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_2(t)\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = g(t)$$

L'ordre d'une équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé, soit ici n.
Si $g(t) = 0$ on dit que l'équation est sans second membre (*ssm*) ou homogène.

On démontre que la solution générale d'une équation différentielle linéaire est la somme :

- de la solution de l'équation sans second membre $y_{ssm}(t)$
- d'une solution particulière de l'équation avec second membre $y_p(t)$ de même nature que le second membre.

On a donc : y(t) = $y_{ssm}(t) + y_p(t)$.
Ce résultat est valable pour toutes les équations différentielles linéaires, quel que soit leur ordre. Les solutions de telles équations ne sont pas uniques mais correspondent à une famille de solutions, elles contiennent un nombre de constantes égal à l'ordre de l'équation.
Dans les problèmes de physique, l'indétermination due à la présence de ces constantes est en général levée du fait qu'il est possible de calculer ces constantes par la connaissance, à un instant donné, des grandeurs étudiées ; cet instant est souvent le début du phénomène étudié : conditions initiales.
On limite l'étude à deux cas particuliers dans ce document.

1. Equation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et à second membre constant.

Soit une fonction $y(t)$ qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme :
$a\dot{y} + by = c$ avec a, b, et c des constantes.

- La solution de l'équation sans second membre est de la forme : $y_{ssm}(t) = K\exp\left(-\frac{b}{a}t\right)$.

  K est une constante.

- Pour la solution particulière on recherche une solution qui est une constante car le second membre est une constante. On a alors $y_p(t) =$ Cte. Comme $\dot{y}_p(t) = 0$, on obtient pour $y_p = \frac{c}{b}$ en injectant $y_p(t) =$ Cte dans l'équation différentielle.

La solution générale de ce type d'équation est de la forme :

$$y(t) = K\exp\left(-\frac{b}{a}t\right) + \frac{c}{b}$$

La condition initiale $y(0) = y_0$ permet de déterminer la constante K :

$$y_0 = K + \frac{c}{b} \Rightarrow K = y_0 - \frac{c}{b}$$

2. Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et à second membre constant.

Soit une fonction $y(t)$ qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme : $a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=d$ avec a, b, c et d des constantes.

Pour déterminer la solution de l'équation différentielle sans second membre, on recherche des solutions de la forme $\exp(rt)$. En injectant cette expression dans l'équation homogène, on obtient, après simplification par $\exp(rt)$ l'équation dite « caractéristique » :

$$ar^2+br+c=0$$

- La solution $y_{ssm}(t)$ dépend du signe du discriminant $\Delta=b^2-4ac$ de l'équation caractéristique. Trois cas sont envisageables :

  $\Delta>0 \quad y_{ssm}(t)=\exp\left(-\frac{b}{2a}t\right)\left(A\exp\left(+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t\right)+B\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t\right)\right)$

  $\Delta=0 \quad y_{ssm}(t)=\exp\left(-\frac{b}{2a}t\right)\left(A+Bt\right)$

  $\Delta<0 \quad y_{ssm}(t)=\exp\left(-\frac{b}{2a}t\right)\left(A\cos\Omega t+B\sin\Omega t\right)=C\exp\left(-\frac{b}{2a}t\right)\cos\left(\Omega t+\varphi\right)$

  avec $\Omega=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

  A, B et C sont des constantes. φ est la phase.
- Pour la solution particulière on recherche une solution qui est une constante car le second membre est une constante. On a alors $y_p(t)$ = Cte. Comme $\dot{y}_p(t)=0$ et $\ddot{y}_p(t)=0$, on obtient pour $y_p=\frac{d}{c}$ en injectant $y_p(t)$ = Cte dans l'équation différentielle.

La solution générale de ce type d'équation est de la forme :

$$y(t)=y_{ssm}(t)+\frac{d}{c}$$

avec $y_{ssm}(t)$ une des trois possibilités évoquées plus haut.

Les constantes d'intégration A, B ou C, φ qui figurent dans y(t) sont déterminées à partir des conditions initiales portant sur $y(0)$ et $\dot{y}(0)$.

Remarques :

- Lorsque les trois coefficients a, b et c de l'équation caractéristique sont du même signe, on a alors pour cette équation des racines négatives lorsqu'elles sont réelles ou à partie réelle négative lorsqu'elles sont complexes.
- La détermination des constantes d'intégration apparaissant dans $y_{ssm}(t)$ se fait en utilisant les conditions initiales sur la solution générale y(t) et non sur la solution de l'équation homogène (sauf dans le cas où le second membre est nul).