Tensions et compressions dans des corps en rotation.
Mines-Ponts 2005 MP (extrait).

1. Fluide en rotation

Un réservoir cylindrique de rayon R, de hauteur *H,* est rempli complètement par un fluide de masse volumique μ_0 au repos. Le réservoir tourne à une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical (Oz) du cylindre ; il entraîne le fluide dans son mouvement. On se place en régime permanent. On note g l'intensité du champ de pesanteur et r la distance à l'axe de rotation. Les phénomènes ne dépendront explicitement que de la variable radiale r.

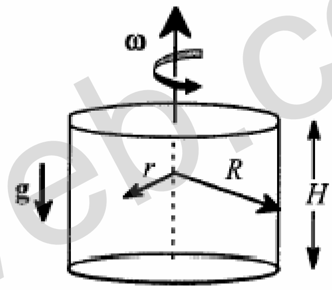

Fig. 1 : cylindre en rotation

❑ 1 — Montrer que la pression p(r) satisfait l'équation différentielle, notée [1] ,

$$\frac{dp}{dr} = \omega^2 r \mu(r)$$

On précisera le phénomène décrit par cette équation et le référentiel dans lequel elle s'applique. Est –il légitime de ne pas tenir compte de la dépendance de p selon la cote z ?

❑2 — Le fluide est un gaz parfait d'équation d'état $p(r) = k_B T \mu(r)/m$, où mla masse d'une molécule de fluide et k_B la constante de Boltzmann. Ce gaz est en équilibre thermique.
Trouver la loi de la distribution de la pression ; cette loi est déterminée ici à une constante multiplicative près, qui est déterminée dans la question qui vient.

❑ 3 — En exprimant la conservation de la masse, et en notant P_0 la pression au repos, établir et commenter la relation

$$p(r) = \underbrace{P_0\left(\frac{mR^2\omega^2}{2k_BT}\right)}_{=\frac{\mu_0 R^2\omega^2}{2}} \frac{\exp\left(\frac{m\omega^2 r^2}{2k_BT}\right)}{\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2k_BT}\right)-1}. \qquad [2]$$

Fluide incompressible

❑ 4 – On suppose dans cette question que la masse volumique μ_o est constante, ce que l'on exprime en disant que le fluide est incompressible. Quelle est, sous cette hypothèse, la nouvelle loi de la distribution de la pression ? Peut-on déterminer la constante d'intégration ?

Fluide compressible

❑ 5 — On abandonne l'hypothèse d'incompressibilité. On adopte comme équation d'état du fluide, liant la masse volumique à la pression, l'équation $\mu = \mu_o[1 + \chi_0(p - P_o)]$, où χ_0 est une constante. Vérifier que χ_0 n'est autre que le coefficient de compressibilité isotherme du fluide, χ_T, à la pression Po : $\chi_0 = \chi_T(P_0)$

❑ **6 —** On suppose que $\varepsilon = \chi_0(p - Po)$ vérifie $|\varepsilon| << 1$. Intégrer alors l'équation [1] de la question 1 et montrer qu'au premier ordre en ε la masse volumique dépend de r selon la loi :

$$\mu(r) = \mu_0\left[1 + \left(\frac{\omega^2\mu_0}{2} r^2 + K\right)\right]$$

❑7 — Déterminer la constante K en exprimant la conservation de la masse et donner l'expression complète de la distribution de pression. Tracer l'allure du graphe de p(r)pour $0 \leq r$

$\leq$ R. Le résultat obtenu serait-il valable pour un fluide incompressible ?

❑ **8 —** Montrer que la condition de validité du calcul, c'est-à-dire $|\varepsilon| \ll 1$, est équivalente à l'inégalité

$$\chi_0 \mu_0 \omega^2 R^2 \ll 1$$

❑ **9 —** Le fluide est de l'eau de masse volumique $\mu_0 = 10^5$ kg.m^{-3}. La vitesse de rotation du réservoir est ω =100 rad..s^{-1}, son rayon est R = 1 m ; la pression au repos est $P_o = 10^5$ Pa et la vitesse, du son dans l'eau, c_{eau}, satisfait la relation $\chi_0 \mu_0 c^2_{eau} = 1$; sa valeur numérique est c_{eau} =1450 m.s^{-1}. L'hypothèse le $|\varepsilon| \ll 1$ est-elle valide ? Comparer la vitesse maximale v_{max} des molécules dans le réservoir à la vitesse du son.

❑ **10 —** Soit c_{GP} la vitesse du son dans un gaz parfait (GP) de masse moléculaire m ;cette vitesse vérifie donc, à la température T, la relation $\chi_T \mu_{GP} c^2_{GP} = 1$ .Calculer χ_T pour le gaz parfait ; établir la relation $mc^2_{GP} = k_B T$ **et** montrer que l'approximation $v_{max} \ll c_{GP}$ appliquée au gaz parfait conduit à loi de distribution de pression trouvée à la question 4. Expliquer la formulation, paradoxale pour un gaz : le gaz parfait est incompressible.

II. Rotation d'une barre rigide

Une barre solide OA, de longueur au repos L_o et de section s constante et très petite devant L^2_o a une masse linéique λ_0. Cette barre tourne autour d'un axe vertical avec la vitesse angulaire constante ω (Fig. 2A et 2B). On appelle T(r) la tension de la barre au point P à une distance r de l'axe de rotation ; cette grandeur représente l'action du reste de la barre sur la longueur OP.

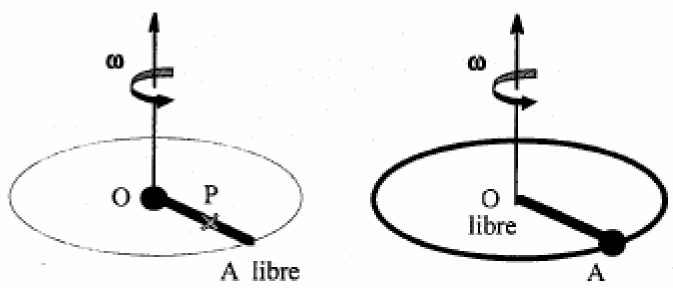

Fig. 2A Fig. 2B

❑ 11 — En considérant un bilan de forces, établir qu'en régime permanent la mesure de T(r) sur l'axe radial, notée T (qui n'est plus une température !), vérifie : $\dfrac{dT}{dr} = -\lambda\omega^2 r$ [3]

Barre rigide

On suppose que la barre est rigide, c'est-à-dire que $\lambda = \lambda_0$ est constant.

❑ 12 — L'extrémité A est libre, l'extrémité O est fixe (fig 2A). Déterminer l'évolution de la tension, notée T (r), le long de la barre.

❑ 13 - L'extrémité O est libre, l'extrémité A est fixée à un mur vertical tournant à la vitesse angulaire ω (fig 2B). Exprimer la nouvelle tension, notée $T_2(r)$.

❑ 14 — Les deux extrémités sont attachées au mécanisme assurant la rotation, de sorte que la longueur de la barre est constante, égale à L_o. Peut-on déterminer la constante d'intégration dans l'équation [3] de la question 11 ? On pourra se reporter à la question 4.

Barre déformable

On abandonne maintenant l'hypothèse de rigidité. On adopte pour la barre l'équation d'état :

$\lambda(r) = \lambda_0 [1 - T(r)/sE]$ où E est une constante appelée module de rigidité et s la section constante de la barre (le module de rigidité de la barre rigide des questions 12 à 14 est infini).

Dans la pratique, l'inégalité $\varepsilon'(r) = T(r)/sE \ll 1$ est vérifiée pour les corps solides.

❑**15 —** Intégrer l'équation [3] et donner le résultat au premier ordre en $\varepsilon'(r)$. Le résultat sera mis sous la forme $T(r)=f(r)+K'$, où K' est la constante d'intégration, indéterminée à ce stade, et f(r) une fonction à déterminer, sous la condition $f(0) = 0$.

❑ **16** - Déterminer la constante K' en exprimant la conservation de la masse. En déduire que la loi de répartition de la tension $T(r)$ est indépendante du module de rigidité. En quel point de la barre cette tension est-elle nulle ?