LE CHAMP DE PESANTEUR TERRESTRE ET SA MESURE

I. Le champ de pesanteur terrestre.

On rappelle qu'une particule de masse M située en O exerce, sur une particule de masse m située en P, une force d'attraction gravitationnelle $\vec{F}$ telle que :

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

soit :

$$\vec{F} = m\,\vec{G}(P)$$

où $\vec{G}(P)$ définit le champ gravitationnel créé en P par la particule de masse M située en O.

$\mathcal{G}$ est la constante gravitationnelle ; on donne $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI.

On admettra en outre qu'étant donné une distribution de masse limitée par une sphère de centre O et de rayon R, et telle que la masse volumique $\mu(P)$ en un point P de la distribution ne dépende que de la distance $r = OP$ (distribution à symétrie sphérique), le champ gravitationnel $\vec{G}$ créé en un point Q quelconque, intérieur ou extérieur à la distribution, est égal au champ qui serait créé par une particule située en O, et dont la masse $M(r)$ est celle de la matière contenue à l'intérieur de la sphère de centre O et de rayon $r = OQ$.

Dans toute la partie I, à l'exception des questions 5 et 6, on confondra le champ de pesanteur avec le champ gravitationnel créé par la terre. La terre sera assimilée à une sphère de centre O, de rayon R et de masse M dont la répartition est à symétrie sphérique. On désignera par g_0 l'intensité de la pesanteur au sol.

On donne $g_0 = 9{,}8$ SI ; R = 6 400 km.

1. 1.1. Exprimer la masse M en fonction de g_0, $\mathcal{G}$ et R. En déduire la masse volumique moyenne μ_m la terre. Application numérique : calculer M et μ_m.

   1.2. En un point Q d'altitude z ($OQ = r = R + z$) exprimer le champ de pesanteur g en fonction de g_0, R et z. Que devient cette expression lorsque $z \ll R$?

2. On considère maintenant une région plane dont le sous-sol présente une cavité sphérique de rayon R′, remplie d'un matériau homogène de masse volumique μ' et dont le centre O′ se trouve à la distance $O'H = h$ du sol. Cette cavité est entourée de roches de masse volumique μ. Loin de la cavité le champ de pesanteur au niveau du sol est g_0.

   2.1. Exprimer l'anomalie $\overrightarrow{\Delta g}$ du champ de pesanteur en un point P du sol à la distance x de H. En quel point particulier $\overrightarrow{\Delta g}$ a-t-il le module maximal Δg_m ? Calculer Δg_m en fonction des données ci-dessus.

   2.2. Quelle est la nature des courbes d'égale valeur de g ?

   2.3. Sachant qu'il s'agit d'un angle faible, exprimer l'angle ε que font les vecteurs $\vec{g}$ et $\vec{g_0}$. Trouver les points Q du sol tels que ε ait la valeur maximale.

   2.4. Au cours d'une prospection on a trouvé la distance HQ = 1 200 m et $\Delta g_m = 36$ mGal (1 Gal = 10^{-2} $m \cdot s^{-2}$). Des sondages ont donné $\mu' = 6{,}8 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$ et $\mu = 2{,}7 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$. Quels renseignements peut-on en déduire sur l'emplacement et l'importance de la cavité souterraine ? Comment les résultats sont-ils modifiés dans le cas $\mu' < \mu$?

3. Soit une coquille sphérique homogène de rayon extérieur R', d'épaisseur $e \ll R'$, et de masse volumique μ.

3.1. Déterminer le champ gravitationnel $\vec{G}(r)$ créé par cette coquille en un point P situé à la distance r du centre de la coquille. Donner en particulier l'expression G_0 du module du champ pour $r = R'$. Comment varie le module $G(r)$ à l'intérieur de la coquille ? Représenter graphiquement la variation de $G(r)$ en fonction de r.

3.2. On considère un très petit élément d'épaisseur e et entourant un point P de la coquille (fig. 1). Comparer entre eux les champs gravitationnels créés par cet élément en M_1 et M_2, situés respectivement sur la surface extérieure et sur la surface intérieure de l'élément. Comparer le champ créé en M_1 par l'élément à celui créé en M_1 par le reste de la coquille. En déduire le champ créé en M_1 par l'élément, à partir du champ qu'y crée la coquille (calculé en 3.1.).

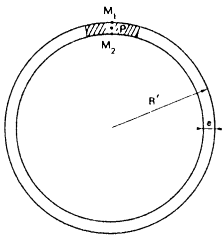

Figure 1

3.3. On considère à la surface terrestre un plateau d'altitude z constitué d'une roche de masse volumique μ. En utilisant les résultats des questions 1.2. et 3.2., calculer le champ gravitationnel $\vec{g}$ au sommet du plateau. On exprimera ce champ en fonction de g_0, z, R, μ et μ_m masse volumique moyenne de la terre. Calculer $\Delta g = g - g_0$.
Application numérique : $z = 10^3$ m, $\mu = 2{,}7 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Calculer Δg en mGal.

3.4. La terre étant considérée comme une sphère dont l'écorce a la masse volumique μ, exprimer g en un point de profondeur $z' \ll R$. On néglige les variations locales de g.
Application numérique : Calculer $g - g_0$ pour $z' = 10^3$m ; $\mu = 2{,}7 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Quelle devrait être la valeur de μ pour que g reste égal à g_0 sur une certaine profondeur de l'écorce terrestre ?

4. Dans cette question on assimile la terre à une sphère homogène de rayon R et de masse volumique μ_m.

4.1. Déterminer le champ gravitationnel $\vec{G}(r)$ en un point P situé à la distance r du centre de la terre. On distinguera les deux cas $r > R$ et $r < R$. Exprimer le module $G(r)$ de ce champ en fonction de g_0, r, et R.
Représenter graphiquement la fonction $G(r)$.

4.2. On imagine qu'on perce un tunnel traversant la terre suivant l'axe Nord-Sud. À l'une des extrémités du tunnel on abandonne sans vitesse un petit objet de masse m. On néglige toute force autre que la force gravitationnelle terrestre.

a. En utilisant un raisonnement énergétique, montrer que le mouvement de l'objet est périodique. En serait-il de même si la répartition de la masse terrestre était supposée seulement à symétrie sphérique ?

b. Supposant homogène la répartition de la masse terrestre, calculer la période T du mouvement en fonction de g_0 et de R.

c. Comparer T à la période d'un satellite terrestre (fictif) orbitant sur une trajectoire circulaire de rayon R. Interpréter simplement le résultat.

5. Par rapport à un référentiel galiléen, la terre a un mouvement de rotation autour de la droite des pôles, de période T_0 égale au jour sidéral. De ce fait le champ de pesanteur inclut, outre le champ gravitationnel dû à la terre, un champ d'inertie dit « centrifuge ».

5.1. Expliquer l'origine du champ centrifuge. Donner l'ordre de grandeur de ce champ par rapport au champ gravitationnel de la terre au niveau du sol.

5.2. Exprimer l'intensité du champ de pesanteur résultant du champ de gravitation de la terre et du champ d'inertie, en un point de latitude λ à la surface de la terre. Calculer numériquement la variation relative du champ de pesanteur entre le pôle et l'équateur. De quel autre fait faudrait-il tenir compte dans ce calcul ?

5.3. En faisant des approximations que justifiera sa faible valeur, exprimer l'angle ε' que fait la direction du vecteur $\vec{g}$ avec le rayon terrestre en fonction des données ci-dessus. Calculer la valeur numérique maximale de l'angle ε'.

5.4. En quels points le champ de pesanteur ainsi défini peut-il s'annuler ? Retrouver ainsi un résultat connu et l'interpréter. Vous paraît-il légitime d'étendre la définition du champ de pesanteur à des distances de la terre de cet ordre ?

6. On s'intéresse maintenant à l'effet du voisinage de la lune sur le champ de pesanteur terrestre. On considère deux points de la surface de la terre P et P', situés sur la droite joignant O au centre de la lune. Calculer la différence $\overrightarrow{\Delta g}$ (resp. $\overrightarrow{\Delta g'}$) entre le champ de gravitation que la lune crée en P (resp. P') et celui qu'elle crée en O. Comparer $\overrightarrow{\Delta g}$ et $\overrightarrow{\Delta g'}$. Expliquer pourquoi c'est le « champ différentiel » $\overrightarrow{\Delta g}$ (resp. $\overrightarrow{\Delta g'}$) qui intervient dans le phénomène des marées et non pas le champ lunaire lui-même. Quelle est la périodicité de la perturbation apportée par la lune au champ de pesanteur terrestre ? Quel autre astre vous paraît devoir aussi perturber ce champ de façon appréciable ?

Application numérique : Calculer Δg connaissant la masse de la lune = M/81 ; la distance terre-lune = 60 R.

II. Les mesures gravimétriques

La connaissance précise du champ de pesanteur intéresse des branches diverses des sciences de la terre : géophysique, océanographie, météorologie. Elle permet entre autres de mieux comprendre la structure interne du globe terrestre et d'apporter une contribution à la sismologie. Elle intervient aussi dans le calcul des trajectoires des satellites ou le guidage des fusées intercontinentales. Les mesures directes du champ de pesanteur sont de deux types : d'une part la détermination absolue de g en un certain nombre de stations, d'autre part la mesure des variations de g au moyen de gravimètres dits relatifs. Les questions qui suivent passent en revue quelques méthodes expérimentales qui sont, ou ont été, utilisées par les géophysiciens.

A. LES GRAVIMÈTRES ABSOLUS UTILISENT LA CHUTE LIBRE DANS LE VIDE

1. 1.1. Un objet tombe en chute libre dans le vide d'une hauteur de 1 mètre. Quelle précision maximale sur g peut-on espérer si on ne tient pas compte de sa variation avec l'altitude ?

1.2. On suppose que g varie avec l'altitude selon la relation approchée trouvée en I 1.2. En un point M où $g = g_0$, on lance verticalement vers le haut dans le vide un objet avec la vitesse $\vec{v_0}$. Quelle est la vitesse de cet objet quand il repasse en M ?

1.3. Si g était uniforme avec la valeur g_0, l'objet repasserait en M au bout du temps t_0. Du fait de la non-uniformité de g, ce temps est $t_0 + \Delta t$. Quel signe peut-on prévoir pour Δt ? Justifier ce signe sans calculer explicitement Δt.

1.4. Calculer Δt. On pourra tenir compte du fait que Δt est un terme correctif et utiliser le résultat II 1.2.

Application numérique : $v_0 = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $g_0 = 9{,}8$ SI.

B. GRAVIMÈTRES RELATIFS

Pour la partie B, l'intensité du champ de pesanteur au lieu considéré est $g = 9{,}8$ SI.

1. On considère un gravimètre constitué par un fil fin horizontal, tendu entre deux points A et B d'un cadre vertical fixe IJKL. Au milieu O de AB est fixée, perpendiculairement à AB, une tige rigide, de longueur l, de masse négligeable, qui supporte une masse ponctuelle m à son autre extrémité P. On désigne par C la constante de torsion de chacun des deux demi-fils OA et OB. La position de la tige est repérée par l'angle θ que fait $\overline{OP}$ avec la verticale ascendante Oz (fig. 4). Lorsque la torsion du fil est nulle cet angle a la valeur θ_0.

   1.1. Écrire l'équation d'équilibre de la masse m.

   1.2. Exprimer la sensibilité $\dfrac{d\theta}{dg}$ du gravimètre.

   1.3. *Application numérique :* On donne $C = 4 \cdot 10^{-4}$ m · N · rad^{-1} ; m = 10^{-2} kg ; $l = 0{,}1$ m ; $\theta = \pi/2$ rad. Calculer θ_0 ainsi que la plus petite variation de g décelable sachant qu'on peut apprécier une variation de 10^{-4} rad de l'angle θ.

2. Dans une variante de l'appareil précédent, une tige rigide OP, de masse négligeable, de longueur l, porte à son extrémité P une masse ponctuelle m, et peut tourner autour d'un axe horizontal fixe passant en O. Une lame élastique agissant au voisinage de O tend à ramener la tige dans la position verticale en exerçant un couple de rappel $-C\theta$ proportionnel à l'angle θ que fait $\overline{OP}$ avec la verticale ascendante Oz (fig. 5).

   2.1. Montrer que suivant la valeur de C il peut exister plusieurs positions d'équilibre de la tige.

   2.2. On veut que la seule position d'équilibre corresponde à $\theta = 0$. Exprimer la valeur minimale C_0 de C pour qu'il en soit ainsi.

   2.3. Donner alors l'expression de la période des oscillations de faible amplitude de la tige, en fonction de l, g et du rapport $\dfrac{C - C_0}{C_0}$.

   2.4. Calculer numériquement $\dfrac{C - C_0}{C_0}$ connaissant $l = 0{,}1$ m ; T = 5 s.

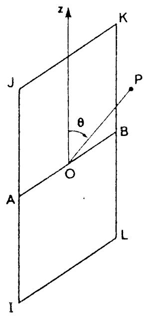

Figure 4

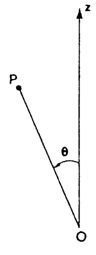

Figure 5

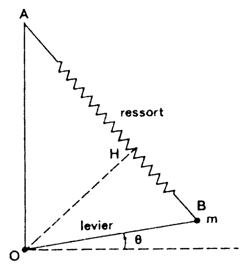

Figure 6

2.5. Quelle est la variation Δg qui provoque une variation relative de période de 10^{-4} ? Comparer à la variation $\Delta g'$ qui provoque la même variation de période d'un pendule simple.

3. Dans un gravimètre à ressort, un levier, de masse négligeable, articulé au point O fixe, supporte une masse ponctuelle m à son autre extrémité B. Il est maintenu dans une position voisine de l'horizontale par un ressort de constante de raideur k et de longueur naturelle l_0. Le point d'attache A du ressort est fixe et situé à la verticale de O (fig. 6).

On pose $OA = a$; $OB = b$; $AB = l$; θ désigne l'angle du levier avec l'horizontale du plan OAB, qui dans la pratique reste très petit.

3.1. Écrire la condition d'équilibre du système et en tirer une expression du rapport l/l_0 en fonction de m, g, k, a. Quelle condition doivent satisfaire ces paramètres pour que l'équilibre existe ? On supposera désormais cette condition réalisée.

3.2. Trouver une autre expression de l en fonction de θ supposé petit et des seules constantes géométriques. En déduire l'expression de θ en fonction des mêmes données ainsi que de m, g, k, l_0.

3.3. Exprimer la sensibilité $\dfrac{d\theta}{dg}$ du gravimètre. Toujours dans l'hypothèse où θ est un angle petit, montrer que l'expression $g\,\dfrac{d\theta}{dg}$ est proportionnelle à $\dfrac{l-l_0}{l_0}$, la constante de proportionnalité ne dépendant que de a et b. Quelle condition doit vérifier l_0 pour que l'appareil soit très sensible ?

3.4. Expliquer pourquoi les appareils de ce type sont placés dans le vide. Y a-t-il d'autres précautions d'emploi ?